Mocninové rady

Mocninový rad je funkcionálny rad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

kde $z \in \mathbb{C}$. Nasledujúce vety vedú k definícii pojmu polomeru a kruhu konvergencie

Veta. Ak $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísel a $r>0$ je reálne také, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konverguje, tak potom rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje rovnomerne a absolútne v kruhu $|z| \leq r$.

Veta. Ak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nekonverguje rovnomerne a absolutne pre každé $z \in \mathbb{C}$, tak existuje $r \in \mathbb{R}$ také, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje absolutne pre $|z|<r$ a nekonverguje pre $|z|>r$.

Číslo r z uvedenej vety sa nazýva polomer konvergencie. Na určenie polomeru konvergencie je možné použiť ľubovoľný test konvergencie pre funkcionálne rady. Napríklad pre funkcionálny rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ taký, že $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = L$ máme, že ak $L<1$, tak rad konverguje a ak $L>1$, rad diverguje.

Ak $f(z)$ je holomorfná vnútri oblasti ohraničenej jednoduchou uzavretou krivkou a z_0 je bod z vnútra tejto oblasti, tak $f(z)$ je možné rozvinúť do Taylorovho radu zo stredom z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

Príklad. Rozviňte funkciu $f(z) = \frac{1}{z+1}$ do Taylorovho radu okolo bodu $z_0 = 1$ a určte polomer konvergencie.

Riešenie. Zámenou súradníc $u = z-1$ dostaneme ekvivalentnú úlohu hľadania rozvoja $\frac{1}{u+2}$ okolo $u=0$. Ďalej môžeme využiť znalosť súčtu geometrického radu $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots$, $|z|<1$. Takže

$$\frac{1}{u+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{u}{2})} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8}\dots\right] = \frac{1}{2} - \frac{u}{4} + \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16}.$$

V premennej z teda máme

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n \qquad \left|\frac{z-1}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |z-1|<2$$

Polomer konvergencie dostaneme buď z podmienky $\left|\frac{u}{2}\right|<1$ pre geometrický rad, alebo použitím kritéria konvergencie

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{n+2}}(z-1)^{n+1}}{\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}(z-1)\right|=\frac{1}{2}|z-1|<1 \Rightarrow |z-1|<2$$

Príklad. Na kružnici určenej stredom rozvoja a polomerom konvergencie môže rad v niektorých bodoch konvergovať a v niektorých divergovať. Pre $f(z)=\ln(1+z)$ v $z=0$ dostaneme rozvoj do Taylorovho radu

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n,$$

lebo $f(0)=0$ a $f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

Z kritéria konvergencie

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}z^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}z\right|=|z|<1$$

je polomer konvergencie $r=1$. Pozrime sa na body $|z|=1$

Pre $z=-1$ dostávame rad

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$$

ktorý diverguje - harmonický rad.

Pre $z=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

je rad so striedavými znamienkami a klesajúcou postupnosťou členov radu, takže tento číselný rad je konvergentný a navyše je známe, že

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$$

Laurentov rad

Pripomeňme, že singulárny bod fukcie $f(z)$ je bod z_0, v ktorom funkcia nie je singulárna.

Nech $f(z)$ je singulárna v $z=z_0$ a nech c_1 a c_2 sú sústredné kružnice so stredom v z_0. Potom ak $f(z)$ je holomorfná v medzikruží určenom c_1 a c_2 a c je ľubovoľná kružnica v tomto medzikruží sústredná s c_1 a c_2, tak $f(z)$ je možné rozvinúť do radu

$$f(z) = \overbrace{\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}}^{\text{hlavná časť}} + \overbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots}^{\text{analytická časť}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

kde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$

Príklad. Rozviňte do Laurentovho radu v okolí $z=2$ funkciu $f(z) = \frac{e^{3z}}{(z-2)^4}$.

Riešenie. $f(z)$ môžeme prepísať do tvaru

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^4} e^{3(z-2)} e^6$$

a využiť rozvoj $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$,

$$f(z) = e^6 \frac{1}{(z-2)^4}\left[1 + 3(z-2) + \frac{9(z-2)^2}{2!} + \frac{27(z-2)^3}{3!} + \frac{81(z-2)^4}{4!} + \dots\right]$$

$$= e^6\left[\frac{1}{(z-2)^4} + \frac{3}{(z-2)^3} + \frac{9}{2(z-2)^2} + \dots\right]$$

Príklad. Rozviňte $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$ do Laurentovho radu v okolí $z=0$

Riešenie. Využijeme, že $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots$, takže

$$f(z) = z^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 4!} - \frac{1}{z^6 \cdot 6!} + \dots\right] =$$

$$= z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!\, z^2} - \frac{1}{6!\, z^4} + \dots$$

Príklad. Rozviňte $f(z) = \frac{1-\cos(z-6)}{(z-6)^2}$ v okolí $z=6$

Riešenie. Pre zjednodušenie zápisu položme $u = z-6$. Potom

$$\frac{1-\cos(z-6)}{(z-6)^2} = \frac{1-\cos u}{u^2} = \frac{1}{u^2}\left[1 - \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots\right)\right] = \frac{1}{2!} - \frac{u^2}{4!} + \frac{u^4}{6!} - \dots$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{(z-6)^2}{4!} + \frac{(z-6)^4}{6!} - \dots$$

Videli sme, že pri rozvoji okolo singulárneho bodu môžeme dostať Laurentov rad s konečnou hlavnou časťou alebo nekonečnou hlavnou časťou. To nám umožňuje klasifikovať singulárne body.

Singulárne body

Singulárny bod z_0 funkcie $f(z)$ je

1) Odstrániteľná singularita, ak existuje konečná limita $\lim_{z\to z_0} f(z)$.
   Ekvivalentne, Laurentov rad okolo z_0 neobsahuje hlavnú časť.

2) Pól rádu n, ak pre nejaké $n\in\mathbb{N}$ je $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = L \neq 0$.

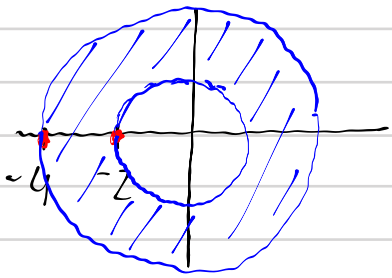
   Ekvivalentne, hlavná časť Laurentovho radu okolo z_0 je neprázdna, konečná stupňa $-n$.

3) Esenciálny singulárny bod, ak nie je ani pól ani odstrániteľná singularita.
   Ekvivalentne, Laurentov rad v okolí z_0 má nekonečnú hlavnú časť.

Príklad. Rozviňte $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+4)}$ do Laurentovho radu v oblasti

$$2<|z|<4$$

Riešenie. Daná oblasť je medzikružie so stredom v $z=0$. Singulárne body sú $z_0=-2$ a $z_0=-4$. Rozložme $f(z)$ na parciálne zlomky



$$f(z) = \frac{-1}{z+2} + \frac{2}{z+4}$$

Všimnime si, že $\dfrac{2}{z+4} = \dfrac{2}{4(1+\frac{z}{4})} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-(-\frac{z}{4})} =$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{16} - \frac{z^3}{64} + \dots\right)$$

konverguje pre $\left|\frac{z}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z|<4$, t.j. v kruhu so stredom 0 a polomerom 4.
Ďalej $-\dfrac{1}{z+2} = -\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1+\frac{2}{z}} = -\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-(-\frac{2}{z})} = -\dfrac{1}{z}\left[1 - \dfrac{2}{z} + \dfrac{4}{z^2} - \dfrac{8}{z^3} + \dots\right]$

konverguje pre $\left|\frac{2}{z}\right|<1 \Leftrightarrow |z|>2$. Takže súčet týchto radov konverguje v medzikruží $2<|z|<4$, a

$$f(z) = \dots + \frac{8}{z^4} - \frac{4}{z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{8} + \frac{z^2}{32} - \dots$$

Vidíme, že Laurantov rad môžeme dostať aj pri rozvoji v nesingulárnom bode. Tu $z=0$ nie je esenciálna singularita, aj keď hlavná časť je nekonečná, lebo $z=0$ nie je singulárny bod.

Rezíduá

Vieme, že $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{pre } n=1 \\ 0 & \text{pre } n \neq 1 \end{cases}$ ak C je jednoduchá uzavretá krivka

ohraničujúca oblasť obsahujúcu z_0 vo svojom vnútri. Ak $f(z)$ má Laurantov rozvoj okolo z_0

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

tak integrovaním člen po člene máme, že

$$\oint_C f(z) = 2\pi a_{-1}$$

Koeficienta a_{-1} laurentovho radu voláme rezíduum.

Príklad. Vypočítajte integrál

$$\oint_C \frac{z}{(z+2)(z+4)}\,dz$$

kde C je kružnica s polomerom 3 a stredom $z=0$

Riešenie. Kružnica C leží v medzikruží $2<|z|<4$ a v ňom má funkcia rozvoj

$$\frac{z}{(z+2)(z+4)} = \dots + \frac{8}{z^5} - \frac{4}{z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{8} + \dots$$

Takže $a_{-1} = -1$ a

$$\oint_C \frac{z}{(z+2)(z+4)}\,dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

Poznámka. Ak daná jednoduchá uzavretá krivka C ohraničuje oblasť vnútri ktorej je viac singulárnych bodov funkcie $f(z)$, tak

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \{\text{súčet rezíduí singularít v oblasti ohraničenej } C\}$$

Samozrejme, počítanie Laurentovho radu na získanie rezídua je pomerne nepohodlné. Avšak v prípade pólov máme nasledovnú vetu

Veta. Nech $f(z)$ je holomorfná vnútri oblasti ohraničenej jednoduchou uzavretou krivkou, okrem jedného bodu z_0, ktorý je pólom rádu n, tak

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right] \right]$$

Príklad. Nájdite rezíduá funkcie $f(z) = \dfrac{3z}{(z+2)^2(z^2+1)}$

Zrejme singulárne body sú $z_0 = -2$, $z_1 = i$, $z_2 = -i$ (zderivujte $f(z)$).
Pre $z_0 = -2$ máme

$$\lim_{z \to -2} (z+2)^2 \cdot \frac{3z}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{-6}{5} \neq 0$$

t.j. -2 je pól radu 2
Podobne sa dá zistiť, že i a $-i$ sú póly rádu 1.
Pre $z_0 = -2$ je

$$a_{-1} = \lim_{z \to -2} \left[\frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[(z+2)^2 \frac{3z}{(z+2)^2(z^2+1)} \right] \right]$$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{d}{dz} \left[\frac{3z}{z^2+1} \right] = \lim_{z \to -2} \frac{3(z^2+1) - 3z \cdot 2z}{(z^2+1)^2} = \frac{15-24}{25} = -\frac{9}{25}$$

Aplikácie - integrovanie reálnych funkcií

Integrály typu $\int_0^{2\pi} F(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta$

Príklad. Vypočítajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos\vartheta - 5}\, d\vartheta$

Riešenie. Funkciu $\cos\vartheta$ možno zapísať ako

$$\cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

Substitúciou $e^{i\vartheta} = z$ dostaneme $|z| = 1$ a $ie^{i\vartheta} d\vartheta = dz \Rightarrow d\vartheta = \frac{dz}{iz}$
Pre $0 \le \vartheta \le 2\pi$ je $z = e^{i\vartheta}$ kružnica so stredom v 0 a polomerom 1. Pôvodný integrál prejde na tvar

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos\vartheta - 5} d\vartheta = \oint_C \frac{1}{4\frac{z+z^{-1}}{2} - 5} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_C \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} dz = \frac{1}{i} \oint_C \frac{1}{(z-2)(2z-1)} dz$$

Singulárne body sú $z_0=2$ a $z_1=\frac{1}{2}$, ktoré sú póly rádu 1. Len $z_1=\frac{1}{2}$ leží v kruhu $|z|<1$. Rezíduum je

$$a_{-1}=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(z-2)\cdot 2\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}-2\right)}=-\frac{1}{3}$$

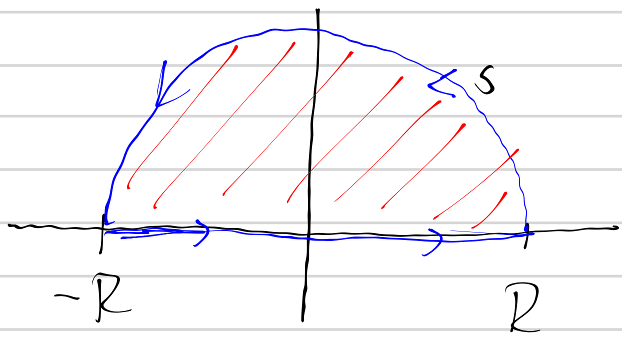
Preto

$$\frac{1}{i}\oint_C\frac{1}{2z^2-5z+2}dz=\frac{1}{i}2\pi i\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}\pi=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\cos\vartheta-5}d\vartheta.$$

Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx$

Príklad. Vypočítajte $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$

Riešenie. Budeme počítať $\oint_C\frac{1}{1+z^4}dz$ na nasledovnej oblasti



C je celá modrá krivka
S je modrá polkružnica

Potom

$$\lim_{R\to\infty}\oint_C\frac{1}{1+z^4}dz=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dz}{1+z^4}+\lim_{R\to\infty}\int_S\frac{1}{1+z^4}dz$$

Singulárne body funkcie $\frac{1}{1+z^4}$ sú $e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{\frac{5\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$. Z nich len $e^{\frac{\pi}{4}i}$ a $e^{\frac{3\pi}{4}i}$ ležia v uvažovanej oblasti a sú póly rádu 1.

Príslušné rezíduá sú:

Pre $z=e^{\frac{\pi}{4}i}$ $\quad res_z f=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}}\frac{z-e^{\frac{\pi}{4}i}}{1+z^4}=|\text{L'Hopital}|=\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{4}}}\frac{1}{4z^3}=\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{4}$

Pre $z=e^{\frac{3}{4}}$ $\quad res_z f=$ $\quad =\frac{e^{-\frac{9\pi}{4}i}}{4}=\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{4}$

Takže

$$\oint_C\frac{1}{1+z^4}dz=2\pi i\cdot\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{3\pi i}{4}}+e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)=\frac{\pi i}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Pozrime sa na $\int_S \frac{1}{1+z^4}dz$, kde S je polkružnica z obrázka.

Túto polkružnicu môžeme parametrizovať ako $z = Re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$.

Potom
$$\left|\int_S \frac{1}{1+z^4}dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{1}{1+R^4e^{4\vartheta i}} \cdot Rie^{\vartheta i} d\vartheta\right| \leq \int \frac{|Rie^{\vartheta i}|}{|1+R^4e^{4\vartheta i}|} d\vartheta = \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^4e^{4\vartheta i}|} d\vartheta$$

Využitím nerovnosti $|a+b| \geq ||a|-|b||$ dostaneme, že $|1+R^4e^{4\vartheta i}| \geq |1-R^4|$

Preto
$$\left|\int_S \frac{1}{1+z^4}dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^4|} d\vartheta = \frac{\pi R}{|1+R^4|} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

A teda
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{1}{1+z^4}dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4}dx + \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_S \frac{1}{1+z^4}dz}_{\to 0} = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4}dx.$$

Integrály tvaru $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx$

Príklad. Vypočítajte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx$, kde $a>0$ a $b>0$

Riešenie. Uvažujme $\oint_C \frac{e^{ibz}}{a^2+z^2}dz$, kde C je krivka ohraničujúca polkruh

ako v predošlom prípade. Integrand má dva jednoduché póly $z=ai$ a $z=-ai$ pričom len pól ai leží v danej oblasti $(R\to\infty)$. Reziduum je
$$\operatorname{res}_{ai} f = \lim_{z\to ai} (z-ai)\frac{e^{ibz}}{a^2+z^2} = \lim_{z\to ai} \frac{(z-ai)e^{ibz}}{(z-ai)(z+ai)} = \lim_{z\to ai} \frac{e^{ibz}}{z+ai} = \frac{e^{-ab}}{2ai}$$

Preto $\oint_C \frac{e^{ibz}}{a^2+z^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ab}}{2ai} = \frac{\pi e^{-ab}}{a}$.

Pre $R\to\infty$
$$\lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{e^{ibz}}{a^2+z^2}dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}dx + \lim_{R\to\infty} \int_S \frac{e^{ibz}}{a^2+z^2}dz = \frac{\pi e^{-ab}}{a}$$

$\int_S \frac{e^{ibz}}{a^2+z^2}dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$ sa ukáže podobným odhadom ako v predošlom prípade.

Preto
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx + i\sin bx}{a^2+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin bx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi e^{-ab}}{a} + 0i$$

Takže
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi e^{-ab}}{a} \quad \text{a} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin bx}{a^2+x^2}dx = 0.$$